

# Оценка числа $\pi$ методом Монте-Карло

## Опыт с бросанием точки

Рассмотрим квадрат

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

выделим подмножество точек  $A \subset \Omega$ , лежащих внутри сегмента круга радиуса 1

$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$

Вероятность того, что случайно брошенная точка попадёт в область  $A$  равна

$$p = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\frac{1}{4}\pi \cdot 1^2}{1 \cdot 1} = \frac{\pi}{4}.$$

С помощью генератора псевдослучайных чисел проведём численный эксперимент и получим оценку вероятности

$$\hat{p} = \frac{N_A}{N},$$

где  $N_A$  – число точек, “попавших” в круг,  $N$  – число бросков.

Тогда для оценки числа  $\pi$  получим

$$\hat{\pi} = 4 \cdot \hat{p}.$$

## Задание

1. Написать функцию, со входным параметром `num_points` (число точек) и выходным параметром `pi_hat` – оценкой числа  $\pi$ .

Построить графики при разном числе точек.

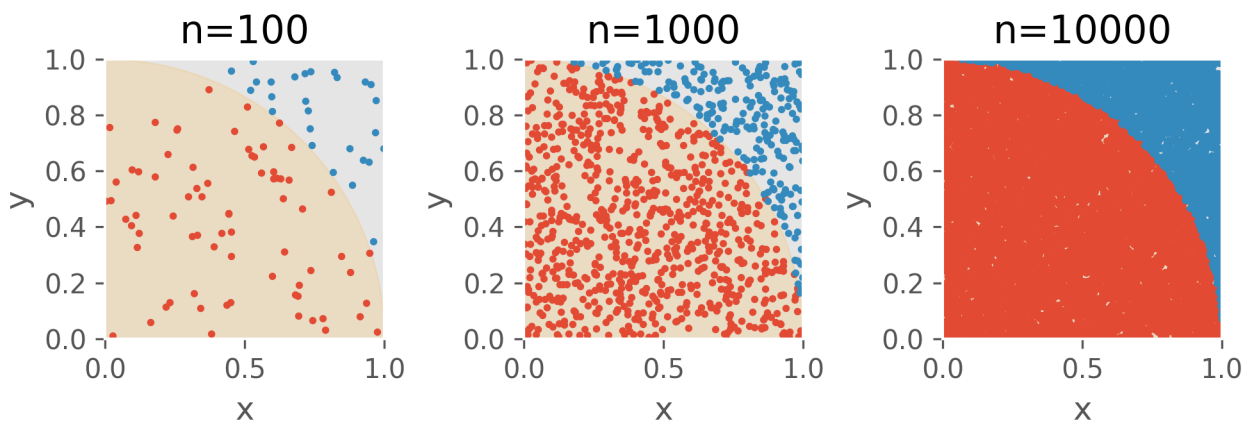


Рис. 1: Пример графика к заданию 1

2. Выполнить серию экспериментов и построить график невязок  $|\hat{\pi} - \pi|$  при разных значениях `num_points`.

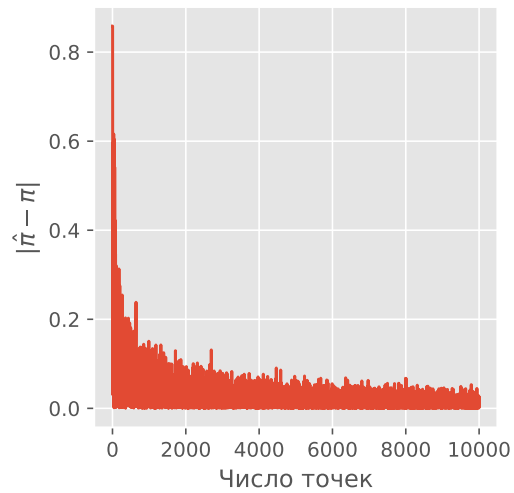


Рис. 2: Пример графика к заданию 2

3. Выполнить серию экспериментов при фиксированном значении `num_points`, построить график невязок  $|\tilde{\pi} - \pi|$  в зависимости от числа усреднений  $N$

$$\tilde{\pi} = \frac{1}{N} \sum_i \hat{\pi}_i.$$

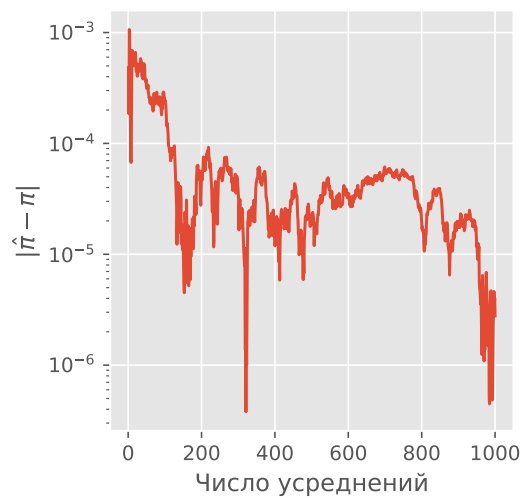


Рис. 3: Пример графика к заданию 3

## Опыт Бюффона о бросании иглы

На столе нарисованы параллельные линии на расстоянии  $2a$  друг от друга. На стол бросается игла длины  $2l$  ( $l \leq a$ ), при этом  $x$  – расстояние от центра иглы до ближайшей прямой,  $\varphi$  – угол между прямой и иглой.

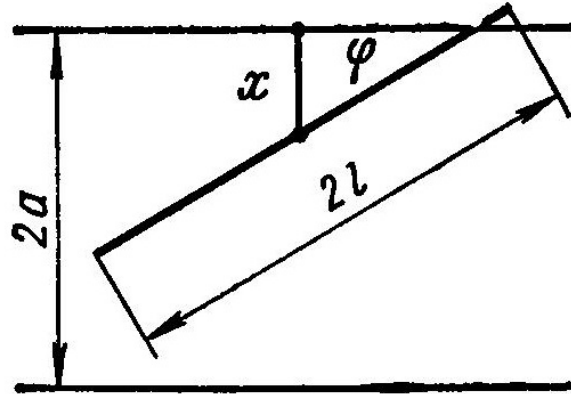


Рис. 4: Схема опыта Бюффона

Условие пересечения иглы и прямой имеет вид

$$x \leq l \sin \varphi.$$

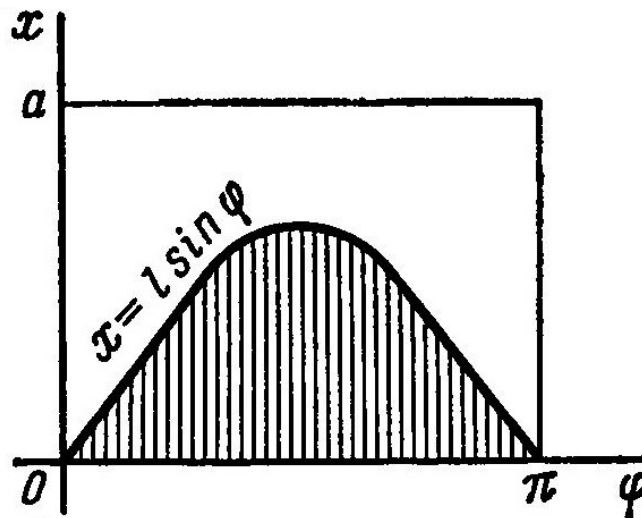


Рис. 5: Иллюстрация к условию пересечения

Тогда вероятность пересечения найдём как

$$p = \frac{1}{\pi a} \int_0^{\pi} l \sin \varphi d\varphi = \frac{2l}{\pi a}.$$

С помощью генератора псевдослучайных чисел проведём численный эксперимент и получим оценку вероятности

$$\hat{p} = \frac{N_A}{N},$$

где  $N_A$  – число игл, пересекающих прямые,  $N$  – общее число брошенных игл.

Тогда для оценки числа  $\pi$  получим

$$\hat{\pi} = \frac{2l}{\hat{p}a}.$$

## Задание

1. Написать функцию, вычисляющую оценку числа  $\pi$ . Входными параметрами:

- `num_lines` – количество линий;
- `width` – расстояние между линиями;
- `num_needles` – количество иголок;
- `needle_length` – длина иглы.

Выходной параметр: `pi_hat` – оценка числа  $\pi$ .

2. Построить график, иллюстрирующий эксперимент.

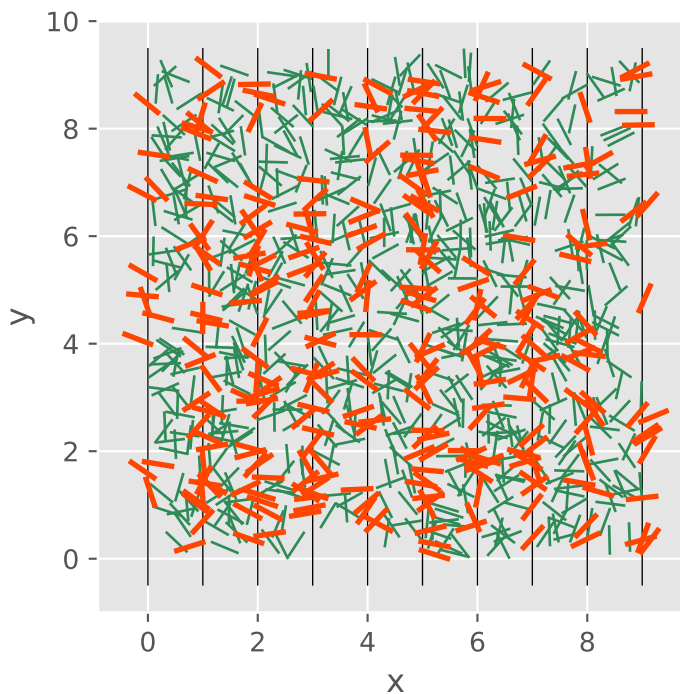


Рис. 6: Пример графика к заданию 2

3. Выполнить серию экспериментов и построить график невязок  $|\hat{\pi} - \pi|$  при разных значениях `num_needles`.

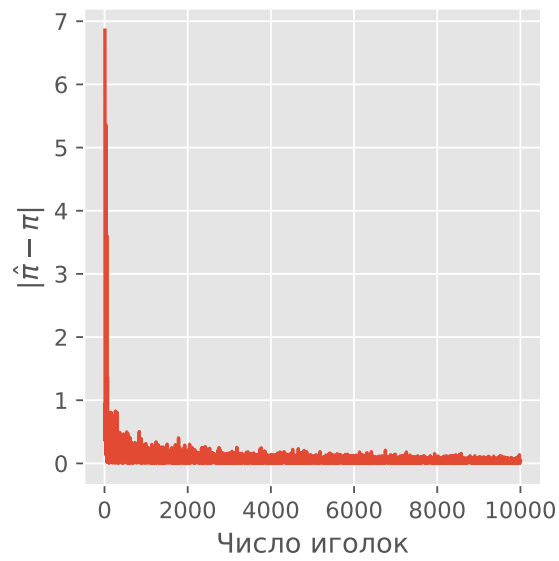


Рис. 7: Пример графика к заданию 3

4. Выполнить серию экспериментов при фиксированных значениях параметров, построить график невязок  $|\tilde{\pi} - \pi|$  в зависимости от числа усреднений  $N$

$$\tilde{\pi} = \frac{1}{N} \sum_i \hat{\pi}_i.$$

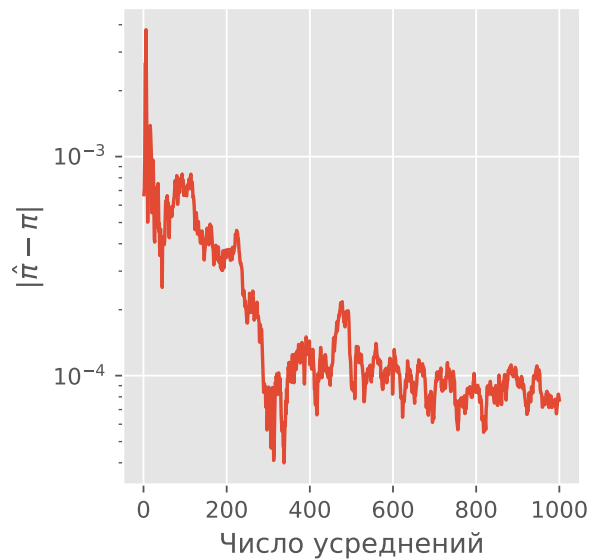


Рис. 8: Пример графика к заданию 4